



Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)

Кафедра математики и анализа данных
Факультет информационных технологий и анализа больших данных

Документ подписан усиленной неквалифицированной электронной подписью.

Организация: «ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Сертификат: Ed+8zrDTNtgDZc/3zfH5h/T9dffYeK3v

Утверждено: Проректор по учебной и методической работе, Е.А. Каменева

Дата: 22.10.2025 г.

Случайные процессы и динамическое моделирование

Рабочая программа дисциплины

для студентов, обучающихся по направлению подготовки

02.03.01 - Математика и компьютерные науки,

Образовательная программа «Цифровая аналитика и математическая оценка рисков»

Профиль:

«Цифровая аналитика и математическая оценка рисков»

Рекомендовано

*Факультет информационных технологий и анализа больших данных
(протокол № 39 от 20.12.2023 г.)*

Одобрено

*Кафедра математики и анализа данных
(протокол № 08 от 04.12.2023 г.)*



Содержание

1. Наименование дисциплины	3
2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине	3
3. Место дисциплины в структуре образовательной программы	4
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся	4
5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий	5
5.1. Содержание дисциплины	5
5.2. Учебно – тематический план	7
5.3. Содержание семинаров, практических занятий	8
6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	10
6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы	10
6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю	13
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине	20
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	7
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	4
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	27
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)	28
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине	28



1. Наименование дисциплины

Случайные процессы и динамическое моделирование

2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	1. Владеет фундаментальными знаниями в области математики.	Знать: классификацию и свойства основных моделей случайных процессов Уметь: обосновывать те или иные теоретические утверждения о случайных процессах
		2. Применяет теоретические знания для выбора оптимальных методов решения поставленных профессиональных задач.	Знать: физический или экономический смысл характеристик основных моделей случайных процессов Уметь: выбирать модель, подходящую к поставленной задаче
		3. Применяет математические методы для решения прикладных математических и технических задач.	Знать: методы теории случайных процессов и теории вероятностей, основы имитационного моделирования Уметь: применять вероятностные методы и проводить имитационное моделирование



3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Случайные процессы и динамическое моделирование» относится к «Общефакультетскому (предпрофильному) циклу».

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

Очная форма обучения

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 5 (в часах)
Общая трудоемкость дисциплины	4/144	144
Контактная работа – Аудиторные занятия	50	50
<i>Лекции</i>	<i>16</i>	<i>16</i>
<i>Семинары, практические занятия</i>	<i>34</i>	<i>34</i>
<i>Самостоятельная работа</i>	<i>94</i>	<i>94</i>
Вид текущего контроля	Контрольная работа	Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации	Зачет	Зачет



5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

5.1. Содержание дисциплины

Тема 1. Введение в теорию случайных процессов. Ветвящиеся процессы

Основные понятия, связанные со случайными процессами, примеры, конечномерные распределения. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Вероятность вырождения. Объем популяции.

Тема 2. Цепи Маркова

Конечномерные распределения дискретной цепи Маркова. Независимость будущего и прошлого при известном настоящем. Матрица переходных вероятностей. Примеры. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Эргодическая теорема для цепей Маркова с дискретным временем. Цепи Маркова с непрерывным временем.

Тема 3. Элементы теории массового обслуживания

Простейший поток событий. Одноканальные и многоканальные системы обслуживания.

Тема 4. Процесс Пуассона и его свойства

Пуассоновский процесс как процесс восстановления. Случайное блуждание с показательными шагами. Свойства процесса Пуассона. Парадокс инспектора. Эквивалентное определение. Ковариационная функция. Непрерывность в среднем квадратичном. Процесс Пуассона как марковская цепь. Мартингальность центрированного процесса Пуассона. Наилучший в среднем квадратичном прогноз.

Тема 5. Винеровский процесс и его свойства

Определение и существование. Винеровский процесс как непрерывное случайное блуждание. Броуновское движение как гауссовский процесс. Непрерывность в среднем квадратичном. Марковское свойство и мартингальность винеровского процесса.

Тема 6. Случайные блуждания

Траектории простых случайных блужданий. Принцип отражения. Моменты остановки. Законы арксинуса. Предельная теорема для максимума случайного



блуждания на отрезке.



5.2. Учебно – тематический план

Очная форма обучения

п/ п	Наименование тем (разделов) дисциплины	Трудоемкость в часах				
		Всего	Контактная работа - Аудиторная работа			Самостоятельная работа
			Общая, в т.ч.:	Лекции	Семинары, практические занятия	
1	Введение в теорию случайных процессов. Ветвящиеся процессы	19	9	3	6	10
2	Цепи Маркова	36	12	4	8	24
3	Элементы теории массового обслуживания	22	6	1	5	16
4	Процесс Пуассона и его свойства	34	11	3	8	23
5	Винеровский процесс и его свойства	26	8	2	6	18
6	Случайные блуждания	7	4	3	1	3
В целом по дисциплине		144	50	16	34	94



5.3. Содержание семинаров, практических занятий

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарах, практических занятиях	Формы проведения занятий
Введение в теорию случайных процессов. Ветвящиеся процессы	1. Конечномерные распределения и траектории явно заданных случайных процессов. 2. Вероятности вырождения процессов Гальтона-Ватсона 3. Вычисление распределений и моментов объема популяции 4. Имитационное моделирование ветвящихся процессов	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений
Цепи Маркова	1. Конечномерные распределения дискретной цепи Маркова. Вычисление вероятностей событий, содержащих траектории с определенными свойствами. 2. Построение матрицы переходных вероятностей. Вычисление переходных вероятностей за 2 шага. 3. Диагонализация стохастической матрицы. Переходные вероятностей за n шагов. Вычисление распределения n-го звена цепи. 4. Стационарное распределение. 5. Определение типа марковской цепи, определение типов состояний. 6. Стационарное распределение марковской цепи с непрерывным временем. 7. Дифференциальные уравнения Колмогорова 8. Матричная экспонента	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений



Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарах, практических занятиях	Формы проведения занятий
Элементы теории массового обслуживания	1. Простейший поток. 2. Одноканальные системы массового обслуживания с ограниченной очередью. 3. Многоканальные системы массового обслуживания с ограниченной очередью.	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений
Процесс Пуассона и его свойства	1. Распределение сечений процесса Пуассона. Вычисление условных и безусловных вероятностей событий измеримых относительно сечений процесса Пуассона. 2. Распределения функций от сечений процесса Пуассона и их характеристики.	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений
Винеровский процесс и его свойства	1. Ковариационная функция функционала от винеровского процесса 2. Распределение функций от сечений винеровского процесса 3. Моделирование винеровского процесса и геометрического броуновского движения.	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений
Случайные блуждания	1. Моделирование случайного блуждания. Оценки распределений моментов остановки, времени пребывания и максимумов. 2. Оценки вероятности разорения	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений



6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
Введение в теорию случайных процессов. Ветвящиеся процессы	Теорема Колмогорова.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Цепи Маркова	Классификация состояний марковской цепи с дискретным временем. Классификация марковских цепей.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Элементы теории массового обслуживания	СМО с неограниченной очередью	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Процесс Пуассона и его свойства	Дважды стохастический процесс Пуассона (процесс Кокса).	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Винеровский процесс и его свойства	Непрерывность и п.н. недифференцируемость траекторий. Неограниченность вариации. Принцип отражения	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Случайные блуждания	Задача о разорении.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.



6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примерные вопросы к контрольной работе

1. Вероятность вырождения ветвящегося случайного процесса с заданным законом размножения частиц.
2. Производящая функция общего числа частиц за все время существования процесса.
3. Свойства матрицы переходных вероятностей однородной цепи Маркова с дискретным.
4. Формула конечномерных распределений однородной цепи.
5. Уравнения Колмогорова-Чепмена.
6. Матрица переходов за n шагов.
7. Распределение состояний на шаге n однородной цепи Маркова.
8. Стационарное распределение однородной марковской цепи с дискретным временем.
9. Матрица переходных интенсивностей.
10. Стационарное распределение марковской цепи с непрерывным временем.
11. Дифференциальные уравнения Колмогорова. Распределение сечений марковской цепи с непрерывным временем.
12. Матрица переходных интенсивностей в многоканальной системе обслуживания с ограниченной очередью.



Примерные задания контрольной работы

1. Найдите вероятность вырождения для ветвящегося процесса с производящей функцией числа потомков одной частицы $1 - p(1 - z)^a$.

2. Пусть $(1, 2, 3)$ – возможные состояния системы, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ – матрица переходных вероятностей за один шаг. Построить граф, соответствующий матрице P .

3. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Начальное распределение задается вектором $\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Найти вероятность того, что через 3 шага состояние цепи будет равно 2.

4. Дана матрица переходных вероятностей марковской цепи: $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$. Найти стационарное распределение цепи.

5. Урна содержит 3 белых шара. Определим операцию замены следующим образом: случайным образом вынимаем один шар и заменяем его черным с вероятностью p и белым с вероятностью $q = 1 - p$. Обозначим через X_n число белых шаров в урне после n замен. Найти матрицу переходных вероятностей марковской цепи $\{X_n\}$. Приблизженную вероятность того, что после бесконечно большого числа замен в урне будет 3 черных шара.

6. Данные, полученные при исследовании рынка ценных бумаг, показали, что рыночная цена одной акции акционерного общества может колебаться в пределах от 1 руб. до 10 руб. Будем интересоваться следующими состояниями, характеризующимися рыночной ценой акции: S1 - 1–4 руб.; S2 - 4–7 руб.; S3 - 7–9 руб.; S4 - 9–10 руб. Замечено, что рыночная цена акции в будущем существенно зависит от ее цены в текущий момент времени. При этом в силу случайных воздействий рынка изменение цены может произойти в любой случайный момент времени. Матрица интенсивностей переходов имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -10 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Составить долгосрочный прогноз рыночной цены акции и ответить на вопрос: стоит ли приобретать акции по цене 4 руб. за шт.?

7. Машина требует наладки в среднем раз в 2 часа. Наладка занимает в среднем 15 минут. Найти зависимость распределения вероятностей рабочего/нерабочего состояний от времени, если в начальный момент времени машина работала (время бесперебойной работы и время наладки считать независимыми и распределенными по показательному закону).



8. Имеются 4 машины, каждая из которых выходит из строя в среднем раз в 2 часа. Найти среднее время наладки, при котором вероятность того, что все машины находятся в рабочем состоянии, составляет не менее 75%. Каждая машина выходит из строя и обслуживается независимо от других (время бесперебойной работы и время обслуживания считаются экспоненциальными). Ответ дать в минутах с точностью до десятых долей.

Дополнительная информация

Примеры тестовых заданий

1. Случайным процессом на $T = [0, +\infty)$ называется

1. семейство функций $\{X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, t \in T\}$
2. семейство случайных величин $\{X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, t \in T\}$
3. семейство функций от времени $\{X(t, \omega): T \rightarrow \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$
4. ни один из перечисленных ответов не является верным

2. Если $X(t, \omega): T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ случайный процесс, то функция $X(t, \omega)$ при фиксированном $t \in T$ называется

1. траекторией
2. сечением
3. мартингалом
4. случайным блужданием

3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ последовательность независимых случайных величин.

Случайная последовательность $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, где $S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$

1. не является цепью Маркова
2. является процессом восстановления
3. является случайным блужданием
4. состоит из независимых случайных величин

4. Семейство конечномерных распределений $\{P_{t_1, \dots, t_m}, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m, m \in \mathbb{N}\}$ называется согласованным, если

1. $P_{t_1, \dots, t_m}(A) = P_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}}(A \times \mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$
2. $P_{t_1, \dots, t_m}(A) = P_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}}(\mathbb{R} \times A), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$
3. $P_{t_1, \dots, t_m}(\mathbb{R}^m) = P_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}}(\mathbb{R}^{m+1})$



$$4. P_{t_1, \dots, t_m}(A) = P_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}}(B), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+1})$$

5. Для произвольной цепи Маркова с дискретным временем $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, марковское свойство при $P\{\xi_0 = i_0, \dots, \xi_k = i_k\} > 0$ записывается как

1. $P\{\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0\} = P\{\xi_k = i_k\}$
2. $P\{\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0\} = P\{\xi_k = i_k \mid \xi_0 = i_0\}$
3. $P\{\xi_0 = i_0 \mid \xi_1 = i_{k-1}, \dots, \xi_k = i_k\} = P\{\xi_0 = i_0 \mid \xi_k = i_k\}$
4. $P\{\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0\} = P\{\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}\}$

6. Для однородной цепи Маркова $\{\xi_n\}$ при условии существования соответствующих условных вероятностей необходимо выполняется следующее равенство

1. $P\{\xi_2 = 3 \mid \xi_1 = 2\} = P\{\xi_2 = 2 \mid \xi_1 = 1\}$
2. $P\{\xi_2 = 3 \mid \xi_1 = 2\} = P\{\xi_3 = 2 \mid \xi_2 = 3\}$
3. $P\{\xi_2 = 3 \mid \xi_1 = 2\} = P\{\xi_3 = 3 \mid \xi_2 = 2\}$
4. $P\{\xi_2 = 3 \mid \xi_1 = 2\} = P\{\xi_2 = 2 \mid \xi_1 = 3\}$

7. P и $P(n)$ матрицы переходных вероятностей однородной марковской цепи за 1 и n шагов соответственно. Какое утверждение ошибочно?

1. $P(n) = P(n-1) \cdot P$
2. $P(n) = P \cdot P(n-1)$
3. $P(n) = P^n$
4. P и $P(n)$ невырождены

8. Пусть последовательность состояний человека (здоров/болен) описывается однородной цепью Маркова. Здоровый человек заболевает на след. день с вероятностью $1/2$, а больной выздоравливает с вероятностью $1/3$. В 1-й день состояния равновозможны. Какова вероятность, что человек здоров на третий день?



1. $29/72$

2. $30/72$

3. $36/72$

4. $43/72$

9. Пусть P и $P(n) = (p_{ij}(n))$ матрицы (размера $k \times k$) переходных вероятностей однородной цепи Маркова за 1 и n шагов соответственно. Распределение $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ называется стационарным, если

1. $\pi P = \pi$

2. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j$

3. $\pi_1 = \dots = \pi_k$

4. $\pi_1 = 1, \pi_2 = 0, \dots, \pi_k = 0$

10. Обозначим $p_k(s, t)$ вероятность появления ровно k событий на отрезке времени $[s, t]$ при простейшем потоке. Какое соотношение не выполняется?

1. $p_0(2,3)p_0(1,2) = p_0(1,3)$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=2}^{\infty} p_k(0,1/n) = 0$

3. $[p_0(0,1)]^t = p_1(0, t)$

4. $p_2(2,3) = p_2(1,2)$

11. Какое равенство иллюстрирует свойство стационарности простейшего потока

1. $p_0(2,3)p_0(1,2) = p_0(1,3)$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=2}^{\infty} p_k(0,1/n) = 0$

3. $[p_0(0,1)]^t = p_1(0, t)$



4. $p_2(2,3) = p_2(1,2)$

12. Процессом Пуассона называется

1. случайное блуждание с показательными шагами
2. процесс восстановления, соответствующий пункту 1
3. случайное блуждание с нормальными шагами
4. процесс восстановления, соответствующий пункту 3

13. Указать неверное утверждение относительно процесса Пуассона $\{N_t\}$ с интенсивностью $\lambda > 0$

1. $P\{N_0 = 0\} = 1$
2. $P\{N_t = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$
3. $P\{N_t - N_s = n\} = \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s}$
4. $EN_1 = \lambda$

14. Пуассоновский процесс не является

1. мартингалом
2. цепью Маркова
3. неубывающим п.н.
4. с незав. приращениями

15. Длины отрезков времени между скачками процесса Пуассона

1. зависимы
2. независимы
3. имеют показательные распределения

4. имеют пуассоновские распределения

16. Определить множитель A в формуле двумерного распределения процесса

Пуассона ($s < t$, $k \leq n$) $P\{N_s = k, N_t = n\} = \frac{s^k}{k!(n-k)!} e^{-\lambda t} \cdot A$

1. $A = t^{n-k} \lambda^n$

2. $A = t^{n-k} \lambda^k$

3. $A = (t-s)^{n-k} \lambda^n$

4. $A = (t-s)^{n-k} \lambda^k$

17. Какое равенство для винеровского процесса $\{W_t\}$ при $s < t$ неверно

1. $DW_t = t$

2. $D(W_t - W_s) = t - s$

3. $D(W_t + W_s) = t + s$

4. $D(W_t + W_s) = t + 3s$

18. Винеровский процесс иногда называют непрерывным случайным блужданием, потому что он

1. является случайным блужданием (СБ)

2. является интерполированным СБ (ИСБ)

3. асимптотически по распределению близок к ИСБ

4. имеет всегда непрерывные траектории

19. В каком случае вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ не обязан быть гауссовским?

1. все ξ_i гауссовские

2. все ξ_i независимые гауссовские



3. $\varphi_{\xi}(\lambda) = \exp\{-1/2 < C\lambda, \lambda >\}$, где матрица $C = C^t$, $C \geq 0$

4. для любого $\tau \in \mathbb{R}^m$: $\sum_{k=1}^m \tau_k^2 > 0$ величина $< \tau, \xi >$ гауссовская

20. Какой набор утверждений для $\{W_t\}$ однозначно определяет винеровский процесс

1. W_t гауссовский, приращ. незав.
2. $W_0 = 0$ a.s., $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, $s < t$, приращ. незав.
3. $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, $s < t$, $cov(W_s, W_t) = \min\{s, t\}$
4. W_t гауссовский, $EW_t = 0$, $cov(W_s, W_t) = \min\{s, t\}$

21. Плотность двумерного распределения винеровского процесса (при $0 < s < t$) имеет вид

1. $g_{s,t}^W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t(t-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t-s} + \frac{(y-x)^2}{t}\right)\right\}$
2. $g_{s,t}^W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{s} + \frac{(y-x)^2}{t-s}\right)\right\}$
3. $g_{s,t}^W(x, y) = \frac{1}{2\pi(t-s)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{x^2 + (y-x)^2}{t-s}\right\}$
4. $g_{s,t}^W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{s} + \frac{y^2}{t}\right)\right\}$

22. Какое из следующих соотношений описывает свойство мартингалльности винеровского процесса $\{W_t\}$?

1. $\lim_{t \rightarrow t_0} E(W_t - W_{t_0})^2 = 0$
2. $g_{t_{n+1}|t_1, \dots, t_n}^W(x_{n+1} | x_1, \dots, x_n) = g_{t_{n+1}|t_n}^W(x_{n+1} | x_n)$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} g_{t|u}^W(z | y) g_{u|s}^W(y | x) dy = g_{t|s}^W(z | x)$
4. $E(W_{t_{n+1}} | W_{t_1} = x_1, \dots, W_{t_n} = x_n) = x_n$



23. Пусть $\{S_n\}$ простое симметричное случайное блуждание (с равновероятными шагами 1 и -1), начинающееся в нуле, $\mu(n)$ и $\tau(n)$ соответственно время пребывания S_n в положительной полуплоскости и момент последнего попадания в ноль на отрезке времени $[0, n]$. Укажите неверное утверждение ($n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$)

$$1. P\{S_{2n} = 0\} = P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0\}$$

$$2. P\{\mu(2n) = 2k\} = P\{S_{2k} = 0\}P\{S_{2n-2k} = 0\}$$

$$3. P\{\tau(2n) = 2k\} = P\{S_{2k} = 0\}P\{S_{2n-2k} = 0\}$$

$$4. P\{S_{2n} = 0\} = 2^{-2n} C_{2n}^n$$

24. В условиях предыдущего вопроса обозначим $M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$. Укажите верное утверждение. При $n \rightarrow \infty$

$$1. P\left\{\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad x \in [0, 1]$$

$$2. P\left\{\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x > 0$$

$$3. P\left\{\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin x, \quad x \in [0, 1]$$

$$4. P\left\{\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

25. Пусть N_t процесс Пуассона с интенсивностью λ . Найти ковариационную функцию $R(s, t)$ случайного процесса $X_t = 2^{N_t}$, $s < t$

$$1. e^{\lambda(t-s)}$$

$$2. e^{\lambda(t+s)}(e^{\lambda s} - 1)$$

$$3. e^{\lambda(t+s)}$$

$$4. e^{\lambda(t-s)}(e^{\lambda s} - 1)$$



7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в разделе 2. «Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний

Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа	1. Владеет фундаментальными знаниями в области математики.	Знать: классификацию и свойства основных моделей случайных процессов Уметь: обосновывать те или иные теоретические утверждения о случайных процессах	$k+2$ рабочих обслуживают машину, состоящую из $m+k+2$ блоков. Каждый блок требует обслуживания в среднем раз в $r + 1$ часов. Обслуживание занимает в среднем $1/(l + 2)$ часа (время бесперебойной работы и время обслуживания считаются экспоненциальными, величины k, m, r, l заданы). Охарактеризуйте процесс изменения количества неработающих блоков, числа отремонтированных блоков (за время ремонта).



Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных мето-	2. Применяет теоретические знания для выбора оптимальных методов решения поставленных профессиональных задач.	Знать: физический или экономический смысл характеристик основных моделей случайных процессов Уметь: выбирать модель, подходящую к поставленной задаче	Постройте матрицу переходных интенсивностей системы. Объясните физический смысл элементов матрицы интенсивностей.
	3. Применяет математические методы для решения прикладных математических и технических задач.	Знать: методы теории случайных процессов и теории вероятностей, основы имитационного моделирования Уметь: применять вероятностные методы и проводить	Используя построенную модель, вычислить теоретическое стационарное распределение числа работающих блоков и среднюю длину очереди в стационарном режиме. Построить имитационную модель и численно оценить указанные характеристики системы.



Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
дов, теоретической механики в профессиональной деятельности		имитационное моделирование	



Примеры практико-ориентированных заданий

Примеры вопросов для подготовки к промежуточной аттестации

Примерные вопросы для подготовки к зачету

1. Понятие случайного процесса. Примеры.
2. Конечномерные распределения случайных процессов. Теорема Колмогорова.
3. Ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона. Производящая функция и ее свойства.
4. Теорема о вероятности вырождения.
5. Распределение общего числа частиц за время существования процесса.
6. Цепь Маркова с дискретным временем. Однородность. Конечномерные распределения однородной цепи. Примеры.
7. Матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Состояние цепи на шаге "n".
8. Предельная теорема для цепей Маркова. Стационарная марковская цепь.
9. Цепь Маркова с непрерывным временем.
10. Стохастическая непрерывность.
11. Матрица переходных интенсивностей.
12. Дифференциальные уравнения Колмогорова.
13. Распределение сечения цепи Маркова с непрерывным временем.
14. Стационарное распределение цепи Маркова с непрерывным временем.
15. Простейший поток событий. Промежуток времени между ближайшими событиями.
16. Распределение числа событий в простейшем потоке как решение соответствующего дифференциального уравнения.
17. Матрица переходных интенсивностей процесса Пуассона.
18. Многоканальная система обслуживания с ограниченной очередью.
19. Процесс Пуассона как процесс восстановления. Траектории. Одномерные сечения пуассоновского процесса.
20. Наблюдение процесса Пуассона, начиная с ненулевого момента времени. Связь с приращениями исходного процесса Пуассона.
21. Свойство отсутствия памяти у показательного распределения.
22. Независимость приращений процесса Пуассона.
23. Конечномерные распределения процесса Пуассона.
24. Ковариационная функция, непрерывность в среднем квадратичном процессе Пуассона.
25. Марковское свойство процесса Пуассона.



26. Мартингальность центрированного процесса Пуассона.
27. Определение винеровского процесса. Теорема о существовании.
28. Многомерное гауссовское распределение: плотность, характеристическая функция. Параметры гауссовского распределения.
29. Гауссовский вектор. Критерий гауссовости.
30. Определение винеровского процесса как гауссовского. Конечномерные распределения винеровского процесса.
31. Непрерывность в среднем квадратичном, марковское свойство винеровского процесса.
32. Переходная функция, переходная плотность винеровского процесса. Уравнения Колмогорова-Чепмена.
33. Мартингальность винеровского процесса
34. Простое симметричное случайное блуждание. Принцип отражения. Вероятность невозвращения в нулевое состояние.
35. Законы арксинуса для случайного блуждания.
36. Асимптотика максимума случайного блуждания.



8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература:

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и математическая статистика в вопросах и задачах: учебник / Е. С. Вентцель. — Москва : Юстиция, 2018. — 658 с. - ЭБС BOOK.ru. – URL: <https://www.book.ru/book/924283> (дата обращения: 28.11.2023). - Текст : электронный.

Дополнительная литература:

1. Булинский, А.В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 403 с. — Текст : непосредственный. – То же. - ЭБС ZNANIUM.com. – URL: <http://znanium.com/catalog/product/544606> (дата обращения: 28.11.2023). - Текст : электронный.

2. Ширяев, А. Н. Вероятность-1: Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы: в 2-х кн. / А. Н. Ширяев. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : МЦНМО, 2007. – 552 с. – ЭБС Университетская библиотека online. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=63256&sr=1 (дата обращения: 28.11.2023). – Текст : электронный.

3. Ширяев, А. Н. Вероятность-2: Суммы и последовательности случайных величин – стационарные, мартингалы, марковские цепи: в 2-х кн. / А. Н. Ширяев. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : МЦНМО, 2007. – 416 с. - ЭБС Университетская библиотека online. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=63257&sr=1 (дата обращения: 28.11.2023). – Текст : электронный.

4. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учебное пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — Москва : Юстиция, 2018. — 480 с. – ЭБС BOOK.ru. – URL: <https://www.book.ru/book/927024> (дата обращения: 28.11.2023). – Текст : электронный.

5. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – Москва : Гос. изд-во физико-математической лит., 1966. – 432 с. - ЭБС Университетская библиотека online. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=116245&sr=1 (дата обращения: 28.11.2023). – Текст : электронный.

Нормативные правовые акты:

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. "Администрирование баз данных" на Stepik - <https://stepik.org/course/3200>



2. Информационно-образовательный портал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации <http://portal.ufrf.ru/>
3. Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>
4. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/>
(<http://library.fa.ru/files/elibfa.pdf>)
5. Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека ОНЛАЙН" <http://biblioclub.ru/>
6. Электронно-библиотечная система издательства "Лань" <https://e.lanbook.com/>
7. Образовательная платформа "ЮРАЙТ" <https://urait.ru/>
8. Научная электронная библиотека eLibrary.ru <http://elibrary.ru>
9. • Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znanium.ru/>
10. "Деловая онлайн библиотека" издательства "Альпина Паблишер" <http://lib.alpinadigital.ru/en/library>
11. • Национальная электронная библиотека <http://нэб.рф/>



10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Самостоятельная работа студентов проходит аудиторно и внеаудиторно. Организации самостоятельной работы служит учебно-тематический план изучения дисциплины. В этом плане указана тематика лекций, практических занятий, вопросы и задания для самостоятельного изучения.

Домашние задания следует выполнять регулярно при подготовке к практическим занятиям. Контроль выполнения домашних заданий осуществляется в ходе практических занятий в процессе выборочного собеседования.



11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем

Комплект лицензионного программного обеспечения:

1. Kaspersky
2. Microsoft Office (Windows)

Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Информационно-правовая система «Гарант»
2. Информационно-правовая система «Консультант Плюс»
3. Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>
4. Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» - <http://www.skrin.ru/>

Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации

1. не предусмотрены

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

1. **Учебная аудитория** для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, в том числе групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная оборудованием и техническими средствами обучения: мебель аудиторная (столы, стулья, доска аудиторная), набор демонстрационного оборудования (проектор, экран)
2. **Компьютерный класс** для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, в том числе групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенный оборудованием и техническими средствами обучения: мебель аудиторная (столы, стулья, доска аудиторная), персональные компьютеры, набор демонстрационного оборудования (проектор, экран)
3. Библиотека, читальный зал